

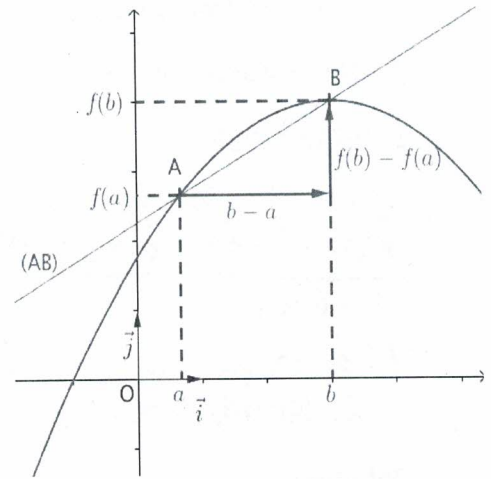
Chapitre 4 : Dérivation locale

1. Taux de variation

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a et b deux nombres réels appartenant à I . On appelle **taux de variation entre a et b** , le nombre
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Graphiquement, si A est le point de la courbe représentative de f d'abscisse a et B le point d'abscisse b , la droite (AB) sécante à la courbe représentative de f a pour pente (ou coefficient directeur) le taux de variation entre a et b .



Exemple :

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Le taux de variation entre 1 et 2 est 7.

Propriété :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. Le taux de variation de f est constant, égal à m .

Démonstration : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(mb + p) - (ma + p)}{b - a}$

$$= \frac{mb - ma}{b - a}$$

$$= \frac{m(b - a)}{b - a}$$

$$= m$$

Propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a et b deux nombres réels distincts appartenant à I .

- Si f est croissante sur I , alors le taux de variations de f entre a et b est positif.
- Si f est décroissante sur I , alors le taux de variations de f entre a et b est négatif.

Remarque :

Les réciproques des propriétés précédentes sont fausses.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc le taux de variation entre 1 et 2 est positif.

Contre-exemple :

Avec la même fonction f (la fonction carrée), le taux de variation entre -1 et 2 est $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2^2 - (-1)^2}{3} = 1 > 0$ mais la fonction carrée n'est pas croissante sur $[-1; 2]$ car décroissante puis croissante.

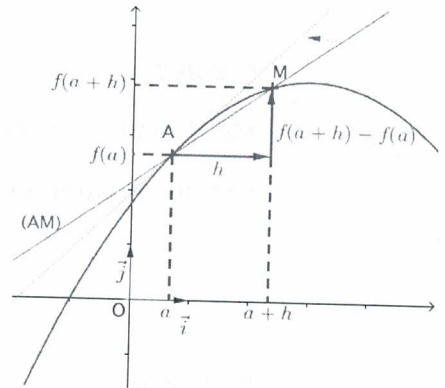
2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Soit h un nombre non nul tel que $a + h$ appartient à I . Dans l'illustration a est l'abscisse du point A et $a + h$ est l'abscisse du point M .

On dit que f est **dérivable en a** lorsque le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers 0.

Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de f en a** . On le note $f'(a)$. $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h) = 1$



Remarque :

Une fonction peut ne pas être dérivable en a .

On verra dans la suite du cours que la fonction racine définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

On commence par calculer $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

$$= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 5 - 3}{h}$$

$$= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 6h}{h}$$

$$= \frac{h(h+6)}{h}$$

$$= h+6$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h+6) = 6$$

Donc f dérivable en 2 et $f'(2) = 6$

Propriété :

La fonction racine définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Démonstration : (au programme)

$$\begin{aligned}\text{Soit } h > 0, \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h} > 0}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}\end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

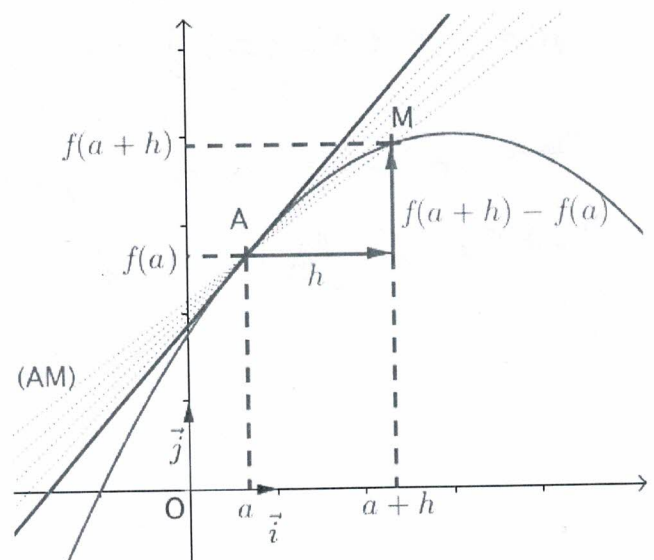
Donc f n'est pas dérivable en 0

3. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I . $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.



Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

T_A

Soit $h \neq 0$

$$f(2) \Leftrightarrow 2^2 + 2 \times 2 - 3$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4 - 3$$

$$\Leftrightarrow 5$$

$$f(2+h) \Leftrightarrow (2+h)^2 + 2(2+h) - 3$$

$$\Leftrightarrow 4 + h^2 + 4 + 2h - 3$$

$$\Leftrightarrow 5 + h^2 + 2h$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} \Leftrightarrow \frac{h^2 + 2h + 5 - 5}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$$\Leftrightarrow h + 2$$

Le coefficient directeur de T_A est 6

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2$$

T_A

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration : (au programme)

$$T_A: y = mx + p$$

$$\Leftrightarrow T_A: y = f'(a)x + p \text{ par définition de la tangente}$$

$$A(a; f(a)) \in T_A \Leftrightarrow f(a) = f'(a) \times a + p$$

$$\Leftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

$$\text{Donc } T_A: y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

$$\Leftrightarrow T_A: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$